

基于分数阶热弹塑性理论的软岩力学特性描述

李海潮¹, 马博¹, 张升^{1,2}, 盛岱超³

(1. 中南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410075; 2. 中南大学 高速铁路建造技术国家工程实验室, 湖南 长沙 410075;

3. 悉尼科技大学 土木与环境工程学院, 澳大利亚 悉尼 NSW 2007)

摘要: 软岩具有复杂的热力学行为, 可能同时存在热增强和热减弱效应, 即软岩的强度会随着温度升高增大或减小。为了描述软岩的力学特性, 将其视作重超固结黏土, 并假定其前期固结应力近似的等于单轴抗剪强度。基于分数阶热弹塑性理论, 建立考虑温度影响的软岩分数阶下加载面模型, 该模型能够在不引入塑性势函数的情况下统一描述相关联和非相关的流动法则。模型计算结果表明, 软岩的热增强和热减弱效应与软岩的塑性流动方向和加载方向之间的夹角密切相关。在三轴压缩不排水试验过程中, 采用非关联的流动法则会导致软岩的应力路径越过其临界状态线并最终达到临界状态, 此时软岩的不排水剪切强度会随着温度的升高而逐渐上升; 反之, 则将观察到热减弱现象。此外, 由于软岩的前期固结应力会随着温度的升高而减小, 在 p - q 平面其初始下加载面可能会位于温度加载面外部, 此时超固结比 OCR 将小于 1。给出的模型能够合理地描述常温下太古石的三轴压缩排水试验结果, 分析结果表明, 软岩的应力-应变曲线具有应变硬化和软化特点, 同时伴随着剪缩和剪胀现象的发生; 针对不同温度下 Ohya 软岩的三轴压缩排水试验计算结果表明, 随着温度的升高, 软岩将逐渐由脆性破坏转变为延性破坏, 其最终剪胀量也会随之减小。相比较修正剑桥模型, 本文模型仅额外的引入了线膨胀系数 α_T 和与软岩剪胀特性相关的模型参数 m , 两者具有明确的物理意义, 可以通过常规的室内试验结果加以确定。

关键词: 岩石力学; 分数阶微分; 软岩; 连续方程

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2020)07-1311-10

Mechanical behaviors of soft rocks based on the fractional thermal elastic-plastic theory

LI Haichao¹, MA Bo¹, ZHANG Sheng^{1,2}, SHENG Daichao³

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China; 2. National Engineering Laboratory for High Speed Railway Construction, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China; 3. School of Civil and Environmental Engineering, University of Technology Sydney, Sydney NSW 2007, Australia)

Abstract: Soft rocks have complex thermodynamic behaviors and their strength maybe increase or decrease with temperature. In this paper, the soft rocks were considered as heavily over-consolidated clays and their preconsolidation pressure was assumed to be the uniaxial compression strength. Based on the fractional thermal elastoplastic theory, a fractional sub-loading surface model for soft rocks considering the effects of temperature was proposed, which can describe associated and non-associated flow rules without introducing the plastic

收稿日期: 2019-12-30; **修回日期:** 2020-01-27

基金项目: 国家自然科学基金优秀青年科学基金项目(51722812); 湖湘高层次人才聚集工程(2018RS3016); 中南大学研究生科研创新项目(1053320170586)

Supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars(Grant No. 51722812), High Level Talents Gathering Project in Hunan Province (Grant No. 2018RS3016) and Postgraduate Scientific Innovation Project of Central South University(Grant No. 1053320170586)

作者简介: 李海潮(1991-), 男, 2013年毕业于中南大学隧道工程专业, 现为博士研究生, 主要从事土体本构关系和大变形破坏数值计算等方面的研究工作。E-mail: haichao821@outlook.com。通讯作者: 张升(1979-), 博士, 现任教授。E-mail: zhang-sheng@csu.edu.cn

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2019.1243

potential. The analysis results show that the phenomena of heat-increase and heat-decrease are closely related to the angle of the plastic flow direction and the loading direction. Application of the non-associated flow rule in the undrained triaxial test results in that stress paths of soft rocks cross through the critical state line and finally reach the critical state, and the undrained shear strength of soft rocks will increase as temperature increases. On the other hand, the associated flow rule will do the opposite. In addition, the preconsolidation pressure of soft rocks will decrease as temperature increases, leading that the sub-loading surface is located outside the temperature loading surface in the p - q plane and that the overconsolidated ratio OCR is smaller than 1. Comparisons between the proposed model with test results indicate that soft rocks show the features of strain-softening and dilatancy, which can be captured by the proposed model, and that, increasing temperature will decrease the fragility of soft rocks as well as the dilatancy. Compared with the modified Cam-clay model, the proposed model introduces two extra parameters including the coefficient of linear expansion α_T and dilative related parameter m , which have clear physical meanings and can be determined through conventional tests directly.

Key words: rock mechanics; fractional derivative; soft rock; constitutive equations

1 引言

通常将单轴抗剪强度小于 20 MPa 的岩石定义为软岩, 典型的如堆积软岩和硅藻质软岩, 其在自然界中具有广泛的分布^[1]。在温度作用下, 软岩具有复杂的力学行为, 可能同时存在热增强和热减弱效应, 其强度会随着温度增大或减小^[2]。如何揭示该现象的内在机制, 是目前岩土工程领域需要解决的一个理论难题。

软岩的热增强和热减弱效应主要表现在强度方面; H. Nakano 和 T. Nishimura^[3]分别在 20 °C 和 60 °C 情况下开展了粉砂岩和泥岩的三轴压缩不排水试验, 结果表明软岩的强度会随着温度升高而下降; 查文华等^[4]根据煤系泥岩的单轴压缩试验结果也得出了类似的结论。何满潮^[5]进一步指出高温、高湿环境易导致围岩软化大变形、强度衰减而发生破坏。然而, C. A. Noble^[6]针对黏土岩的试验结果表明, 温度升高会导致软岩的强度上升, 存在所谓的热增强效应; 该效应同样可以在不同温度作用下正常固结黏土的试验结果中观察得到^[7-8]。对此, 张升等^[9]将软岩视作具有结构性的超固结黏土, 并指出热增强和热减弱效应主要是超固结性、结构性和温度等因素共同作用的结果。

热增强和热减弱效应同时表现在软岩的剪胀特性方面, H. M. Abuel-Naga^[10]指出, 黏土的塑性因子会随着温度升高而增大, 而 B. Ghahremannejad^[11]则根据试验结果给出了相反的结论。李海潮等^[12]建议可以采用考虑温度影响的高阶剪胀方程对该效应进行统一的描述, 然而他们并没有进一步讨论温度对软岩应力 - 应变曲线的影响, 存在一定的局限性。

从理论上认识软岩的热增强和热减弱效应, 并进行统一的描述, 无疑会极大地加深人们对软岩热力学行为的认识。

作为一种典型的弹塑性材料, 软岩的应力 - 应变曲线具有应变硬化和软化特点, 同时伴随着剪胀现象的发生, 其力学特性与超固结黏土类似^[1]。在温度作用下, 软岩的前期固结应力会随着温度升高而减小, S. Zhang 等^[2]采用温度引起等效应力的力学概念对该现象进行合理的描述, 从而建立了考虑温度影响的软岩下加载面模型。在此基础上, 张升等^[9]进一步探究了温度作用下结构性对软岩力学特性的影响; 杨骥莱等^[13]则考虑了中间主应力的影响。由于软岩可以被视作初始超固结比很大的黏土, 考虑温度影响的黏土本构模型同样能够提供有益的参考。

上述模型主要采用相关联的流动法则, 在描述软岩体积变形特点时存在一定的不足, 需要加以改进。Y. Sun 等^[14-15]指出, 可以采用 Caputo 微分方法^[16]得到分数阶流动法则, 从而在不引入塑性势函数的情况下统一的描述相关联和非相关联的流动法则。该方法的主要特点在于可以根据屈服函数直接得到塑性流动方向和加载方向, 两者之间的夹角取决于分数阶数的具体取值。目前, 分数阶弹塑性理论被广泛应用于岩土工程领域以描述不同类型岩土材料的力学特性, 并且取得了极大的成功^[17-20]。

本文试图从理论上对软岩的热增强和热减弱效应进行统一的描述, 进而探究温度对软岩力学特性的影响。首先, 本文基于 Caputo 微分方法给出了分数阶热弹塑性理论。在此基础上, 考虑温度对软岩前期固结应力和剪胀特性的影响, 建立起适用于软岩的分数阶下加载面模型。通过将模型计算结果与

试验结果进行对比分析，初步验证了本文模型的合理性。

2 分数阶微分定义

分数阶微分是传统整数阶微分的直接拓展，本文采用 Caputo 定义的积分形式^[16]：

$${}_a D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad (x>a) \quad (1)$$

式中： $D(=\partial^\alpha / \partial x^\alpha)$ 为分数阶微分符号； α 为分数阶数； $a(=0)$ 为积分下限， x 为积分上限，在本文中表征当前的应力状态； Γ 为伽马函数，表达式为 $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-\tau)\tau^{x-1}d\tau$ 。值得注意的是，幂函数的 Caputo 分数阶微分具有如下显式解：

$${}_0 D_x^\alpha(x^m) = \frac{\partial^\alpha(x^m)}{\partial x^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha} \quad (m>-1) \quad (2)$$

3 软岩分数阶下加载面模型

如无特别说明，本文应力均为有效应力且体积变形以压为正。有效平均主应力 p ，剪应力 q 和剪应力比 η 分别表示为

$$p = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\xi}\|, \quad \eta = \frac{q}{p} \quad (3)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量； $\boldsymbol{\xi}$ 为剪应力张量，满足如下表达式：

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\sigma} - \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})/3 \cdot \mathbf{1} \quad (4)$$

式中： $\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij}$ ， δ_{ij} 为克罗内克符号。

3.1 温度加载面

由于软岩具有较好的连续性，并具有显著的应变软化和剪胀特性，因此可以将软岩视作超固结黏土。N. Sultan 等^[21]指出，超固结重塑土会随着温度的改变而产生热弹性体积变形。为此，本文引入了温度加载面的力学概念，并将其作为超固结重塑土的参考屈服面，其中参考应力点为 (\bar{p}, \bar{q}) 。如图 1 所示，在 p - q 平面，前期固结应力 \bar{p}_{cT} ，即温度加载面与 p 轴的交点，会随着温度升高而减小；温度加载面也随之发生收缩，导致土体产生额外的热弹性体积变形。

S. Zhang 等^[2]基于等效应力的力学概念指出，软岩的前期固结应力 \bar{p}_{cT} 会随着温度升高呈指数规律下降，即

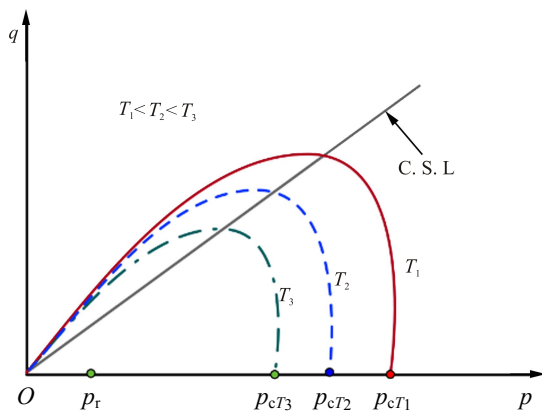


图 1 温度加载面示意图

Fig.1 Schematic plot of temperature-loading surface

$$\bar{p}_{cT} = \bar{p}_{cT_0} \exp\left[\frac{3\alpha_T}{\kappa}(1+e_0)(T-T_0)\right] \quad (5)$$

式中： e_0 为有效平均主应力 $p = 98 \text{ kPa}$ 时的参考孔隙比； α_T 为线膨胀系数； κ 为 e - $\ln p$ 平面中各向同性压缩曲线的回弹模量； \bar{p}_{cT_0} 为常温($T_0 = 15^\circ\text{C}$)时对应的前期固结应力，本文假定 \bar{p}_{cT_0} 近似的等于软岩的单轴抗剪强度。参考修正剑桥模型^[22]的屈服函数，温度加载屈服面可以表示为

$$\bar{f} = (2\bar{p} - \bar{p}_{cT})^2 + \left(\frac{2\bar{q}}{M}\right)^2 - \bar{p}_{cT}^2 = 0 \quad (6)$$

式中： M 为 p - q 平面临界状态线(critical state line, C.S.L)的斜率。在 p - q - T 空间，温度加载面的演化规律如图 2 所示，可以看出，升高温度会导致温度加载面发生收缩。假定修正剑桥模型的硬化法则适用于 \bar{p}_{cT_0} ，则温度加载面的演化规律可以表示为

$$\bar{p}_{cT} = \bar{p}_{0i} \exp\left[\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^p + \frac{3\alpha_T}{\kappa}(1+e_0)(T-T_0)\right] \quad (7)$$

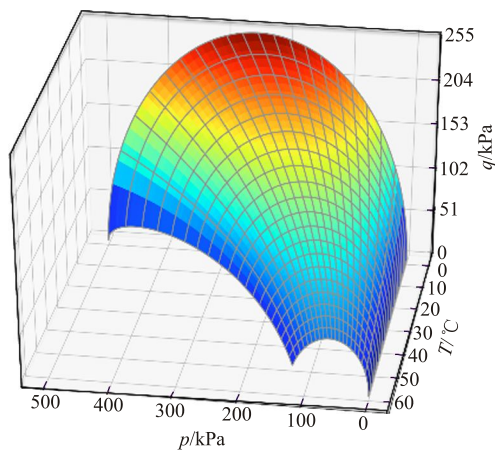


图 2 p - q - T 空间温度加载面演化规律

Fig.2 Evolution of thermodynamic loading surface in p - q - T plane

式中： \bar{p}_{0i} 为常温下温度加载屈服面的初始位置， λ 为 $e-\ln p$ 平面中各向同性压缩压缩曲线的回弹模量。

3.2 下加载面

进一步，本文引入下加载面的力学概念^[23-24]以表征软岩的超固结状态。如图 3 所示，软岩当前的应力点 (p, q) 始终位于下加载面上，在剪切过程中发生弹塑性变形；参考应力点 (\bar{p}, \bar{q}) 则位于温度加载面上，表征正常固结状态。

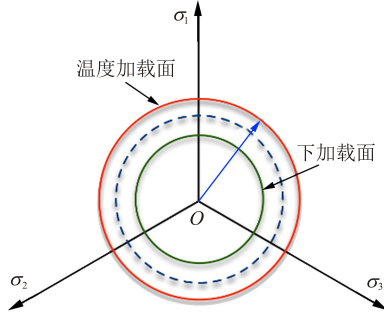


图 3 下加载面力学概念图
Fig.3 Schematic plot of sub-loading surface

温度加载面和下加载面之间的相对位置可以采用相似因子 R 进行描述，基于径向映射法则^[25]， R 可以定义为

$$R = p / \bar{p} = q / \bar{q} \tag{8}$$

根据式(6)可以得到当前参考有效平均主应力 \bar{p}_{cr} 的表达式为 $\bar{p} = \frac{M^2 + \eta^2}{M^2} \bar{p}_{cr}$ ，根据相似因子 R 的定义， R 可以进一步改写为

$$R = \frac{M^2 p}{(M^2 + \eta^2) \bar{p}_{cr}} \tag{9}$$

R 与超固结比 OCR 具有相似的物理意义，当 $R=1$ 时，温度加载面与下加载面重合。

假定下加载面与温度加载面具有相似的几何形状，则下加载面屈服函数 f 可以表示为

$$f = (2p - p_c)^2 + \left(\frac{2q}{M}\right)^2 - p_c^2 = 0 \tag{10}$$

式中： p_c 为下加载面与 p 轴的交点，作为硬化参量用于控制下加载面的大小。

图 4 给出了剪切过程中相似因子 R 随轴向应变 ε_a 的变化规律及温度对其影响。可以看出， R 随着轴向影响增大而增大，并最终趋近于 1。此外，随着温度升高， R 的初始值会逐渐减小，软岩的超固结性也随之逐渐减弱。值得注意的是，在 OCR 较小的情况下，升高温度可能会导致欠固结的力学现象，此时下加载面位于温度加载面外部，并且有 $R>1$ 。

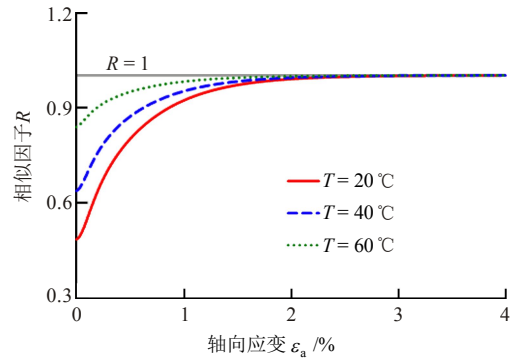


图 4 不同温度下相似因子 R 随轴向应变 ε_a 的变化规律
Fig.4 Evolution of similarity ratio R with the axial strain ε_a under various temperatures

3.3 塑性流动法则

不同于传统的弹塑性理论，分数阶弹塑性理论假定塑性应变增量 $d\varepsilon^p$ 可以表示为

$$d\varepsilon^p = \Lambda \frac{\partial^\alpha f[\boldsymbol{\sigma}, H(\varepsilon_v^p, T)]}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\alpha} \tag{11}$$

式中： Λ 为塑性因子； H 为硬化参量，本文假定 H 为关于塑性体积应变 ε_v^p 和温度 T 的函数。将 Caputo 微分方法作用于式(10)， f 关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分数阶偏导数具有如下表达式，具体参见 D. Lu 等^[19]的研究：

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\alpha} = \frac{1}{3} \left[\frac{\alpha M^2 p^2 - (2-\alpha)q^2}{\Gamma(3-\alpha)p^\alpha} \right] \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{2q^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \tag{12}$$

如图 5 所示，可以通过改变分数阶数 α 的取值来调整塑性流动方向矢量 \mathbf{m} 和加载方向矢量 \mathbf{n} 之间的夹角，从而统一的描述相关联和非相关联的流动法则。当 $\alpha=1$ 时，塑性流动方向矢量与加载方向矢量重合并垂直于屈服面，此时式(11)退化为相关联流动法则。

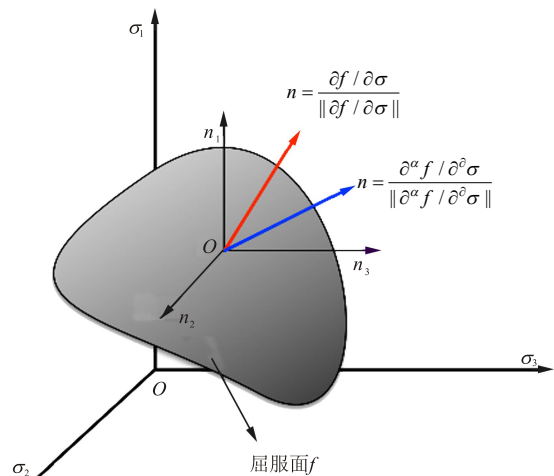


图 5 分数阶流动法则示意图
Fig.5 Schematic plot of fractional flow rule

3.4 剪胀方程

塑性剪胀因子 d 可以定义为

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{\partial^\alpha f / \partial p^\alpha}{\partial^\alpha f / \partial q^\alpha} \quad (13)$$

式中： $d\varepsilon_v^p$ 和 $d\varepsilon_s^p$ 分别为塑性体积应变增量和塑性剪切应变增量。将式(12)代入(13)可得

$$d = \frac{\alpha M^2 - (2 - \alpha)\eta^2}{2\eta^{2-\alpha}} \quad (14)$$

可以看出，当 $\alpha=1$ 时，式(14)可以直接退化为修正剑桥模型的剪胀方程，即 $d = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}$ 。 α 的演化规律需要同时满足以下 2 个条件：

(1) 当软岩处于临界状态时，需满足条件 $\eta = M$ 和 $d = 0$ ，根据式(14)，此时分数阶数 α 应该等于 1。

(2) 当软岩当前的应力点位于剪胀线上 ($\eta = M_d$) 时，其中 M_d 为剪胀应力比，需要选取合适的 α 的取值以满足条件 $d = 0$ 。

为了给出 α 的具体表达式，本文假定剪胀应力比 M_d 与相似因子 R 之间满足以下经验公式：

$$M_d = MR^m \quad (15)$$

式中： m 为与剪胀特性相关的模型参量。由于 R 为关于超固结比 OCR 和温度 T 的函数，根据式(9)， OCR 和 T 均会对软岩的剪胀特性产生影响。结合式(14)，(15)与条件 2，可以得到分数阶数 α 关于相似因子 R 的表达式：

$$\alpha = \frac{2R^{2m}}{1 + R^{2m}} \quad (16)$$

根据式(16)，令 $R=1$ ，可以得到 $\alpha=1$ ，因此本文给出的 α 演化规律始终满足条件 1。在不同温度下软岩三轴压缩不排水试验过程中，分数阶数 α 随剪应力比 η 的变化规律如图 6 所示，可以看出随着温度升高， α 的初始值逐渐增大，软岩塑性流动方向与加载方向之间的非关联性逐渐减弱； α 会随着 η 的增大而逐渐增大，并最终趋近于 1，此时软岩的变形特点满足相关联的流动法则。

3.5 硬化法则

适用于下加载面的硬化法则需要能够合理的描述软岩的应变软化和剪胀特性，对此，Y. P. Yao 等^[26-27]提出统一硬化参量可以作为有益的参考。在给出硬化参量 p_c 演化规律的具体表达式之前，首先定义一个软化因子 S 来直观地描述当前应力点与 p - q 平面中剪胀线之间的相对位置：

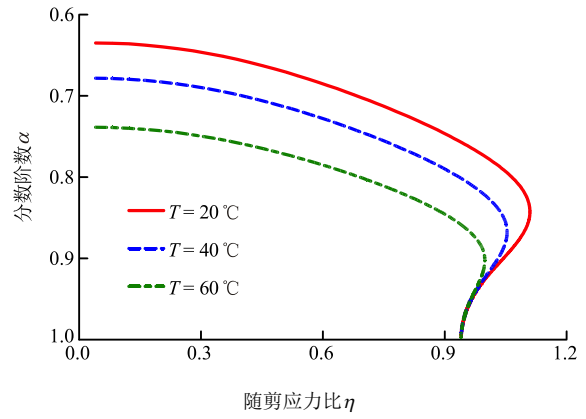


图 6 不同温度下软岩三轴压缩不排水试验过程中分数阶数随剪应力 η 的变化规律

Fig.6 Evolution of fractional order α with shear stress ratio η in the undrained triaxial test with various temperatures

$$S = \ln \left(\frac{2M_d^2}{M_d^2 + \eta^2} \right) \quad (17)$$

根据式(17)，在 p - q 平面，若当前应力点位于剪胀线上方 ($\eta > M_d$) 时，有 $S < 0$ ；反之有 $S > 0$ ；若当前应力点恰好落在剪胀线上 ($\eta = M_d$) 时，则可以得到 $S = 0$ 。在此基础上，假定下加载面的硬化法则具有如下表达式：

$$dp_c = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} p_c \left(1 - \frac{\ln R}{RS} \right) d\varepsilon_v^p \quad (18)$$

当 $R=1$ 时，式(18)将退化为修正剑桥模型的硬化法则，此时，下加载面将与温度加载面重合，并且在 p - q 平面以相同的速率沿着 p 轴运动。

至此，可以得到考虑温度影响的软岩分数阶下加载面模型，该模型包含 8 个参数 (p_{c0} , e_0 , ν , M , λ , κ , m 和 α_T)。其中， p_{c0} 为前期固结应力，本文假定其近似的等于单轴抗剪强度。临界状态相关参数 (e_0 , ν , M , λ 和 κ) 可以通过常规的室内试验结果进行标定，如三轴压缩试验和各向同性压缩试验。 α_T 为线弹性系数，A. Uchaipichat 和 N. Khalili^[28]针对 Bourke 黏土的试验结果表明，在升高温度的过程中，土体的热弹性体积变形不受前期固结应力的影响，于温度呈线性变化规律，据此可以确定 α_T 的值。 m 为与剪胀特性相关的模型参数，可以对特定围压下的应力 - 应变曲线进行试算以确定 m 的值，进而得到最佳的拟合效果。值得注意的是，在实际过程中很难针对软岩开展完备的室内试验以获得准确的材料参数，此时，可以采用粒子群优化方法仅通过常规的三轴试验数据对模型参数进行标定^[29]。

3.6 热增强和热减弱效应

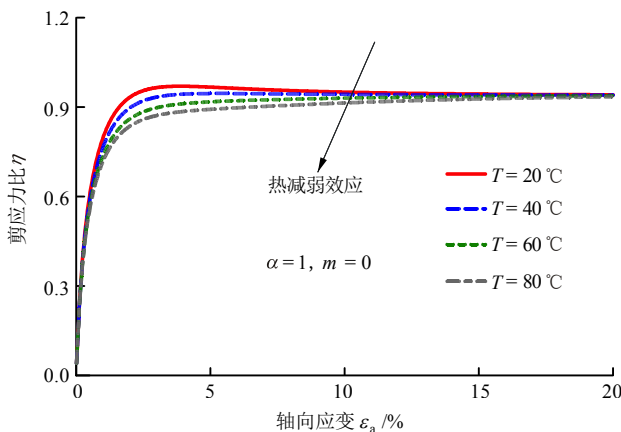
张升等^[9]认为,软岩强度的热增强和热减弱是初始超固结状态、初始结构状态和温度等因素共同作用的结果。本文试图采用所建立的模型,进一步探究了塑性流动法则的非正交性对软岩热增强和热减弱效应的影响。为此,笔者开展了不同温度下软岩三轴压缩不排水数值试验,假定软岩的初始围压为 100 kPa,其初始超固结比 $OCR=2$,模型参数如表 1 所示。

表 1 热增强和热减弱现象模型参数

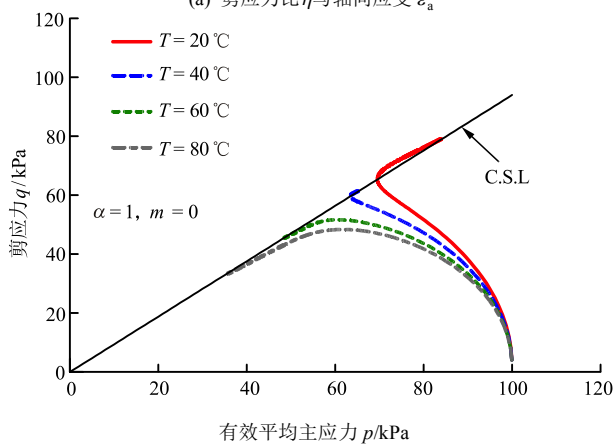
Table 1 Model parameters for thermal enhancement and thermal attenuation

e_0	ν	M	λ	κ	m	α_T
0.83	0.2	0.94	0.093	0.02	-	3.0×10^{-6}

首先采用相关联的流动法则,令 $m=0$ 使得 $\alpha=1$,模型计算结果如图 7 所示。根据图 7(a),软岩的不排水抗剪强度会随着温度的升高而减小,表现为热减弱效应。软岩的有效应力路径如图 7(b)所



(a) 剪应力比 η 与轴向应变 ϵ_a



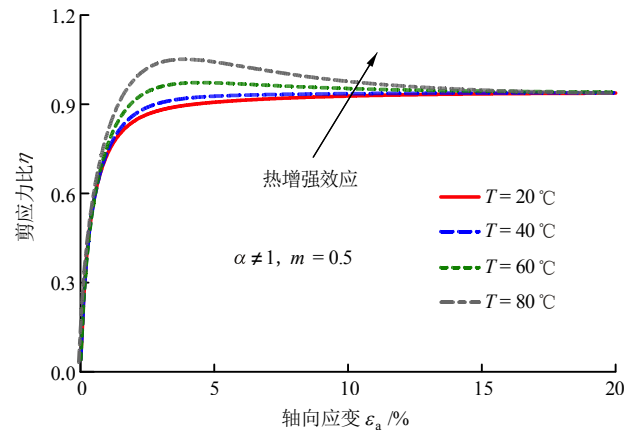
(b) 应力路径

图 7 相关联流动法则模型计算结果

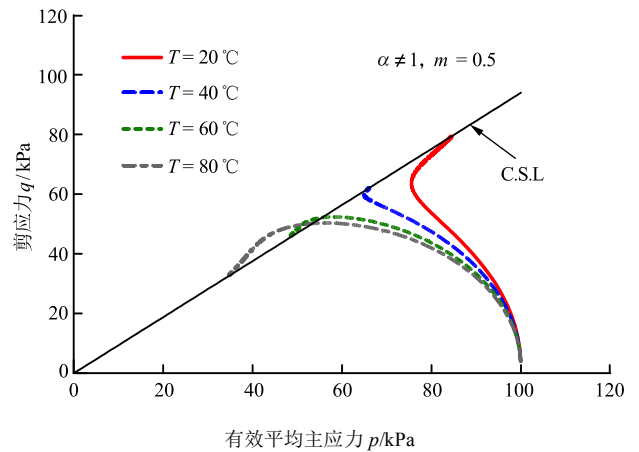
Fig.7 Calculation results by associated flow rule model

示,当温度 $T=20\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $40\text{ }^\circ\text{C}$ 时,软岩的有效应力路径具有“S”型变化特点,与超固结黏土的试验结果保持一致。随着温度升高,软岩的前期固结应力会逐渐减小,产生欠固结现象。此时,软岩的有效应力路径始终位于临界状态线下方,其变化规律与松砂类似,软岩不排水剪切强度将小于临界状态强度。

图 8(a)表明,在高温($T=60\text{ }^\circ\text{C}$ 和 $80\text{ }^\circ\text{C}$)下,采用非关联流动法则($m=0.5$ 且 $\alpha \neq 1$)会导致软岩的不排水剪切强度随温度升高而上升,表现为热增强效应;此时,软岩的有效应力路径将越过其临界状态线,如图 8(b)所示。



(a) 剪应力比 η 与轴向应变 ϵ_a



(b) 应力路径

图 8 非相关联流动法则模型计算结果

Fig.8 Calculation results by non-associated flow rule model

本文模型计算结果表明,在 OCR 很小的情况下,软岩可能同时存在热增强和热减弱效应,该效应与流动法则的正交性密切相关。当采用相关联的流动法则时,软岩的不排水剪切强度会随着温度升高而减小,表现为热减弱效应;随着塑性流动方向与加载方向之间的夹角逐渐增大,即使在低温的条件下,软岩的应力路径也将越过临界状态线,其不

排水剪切强度会随着温度升高而增大，表现为热增强效应。随着 OCR 逐渐增大，温度对软岩强度的影响将逐渐减小。

4 模型验证

为了进一步验证本文模型的合理性，首先采用其对常温下太古石的三轴压缩排水试验结果^[1]进行计算。太古石的学名为流纹岩质角砾凝灰岩，其物理特征表现为具有较大孔隙比而相对密度较轻 ($G_s = 2.5$)，属于一种典型的堆积软岩，主要分布在日本栃木县宇都宫市大谷町一带。根据张峰^[1]的建议，为了获得良好精度的计算结果，在制样的过程中，需要对尺寸为 200 mm×100 mm×80 mm 的长方体试样的各平面进行抛光处理，同时采用二氧化碳气体置换和真空水浸等方法对试样进行饱和。

Y. L. Xiong 等^[30]指出，软岩的残余强度应力比会随着围压的增大而逐渐减小；对此，张升等^[31]认为软岩残余强度围压依存性与其结构性破坏速率有关。本文不考虑围压对软岩残余强度的影响，假定其临界状态剪应力比为定值。在试验过程中，加载围压 p_{oi} 分别为 0.5, 1.0, 1.5 和 2.0 MPa，假定太古石的前期固结应力 p_{cT_0} 为 30 MPa，则不同围压下的初始超固结比 OCR 分别为 60, 30, 20 和 15，模型参数如表 2 所示。

表 2 太古石模型参数

Table 2 Taikoo stone model parameters

e_0	ν	M	λ	κ	m	α_T
0.95	0.1	1.3	0.023 5	0.009	0.35	-

图 9 给出了不同围压下的太古石试验结果及模型计算结果，可以看出太古石具有应变软化和剪胀特性，而本文模型能够较好的描述常温下太古石的应变-应变曲线和体积变形特点。主要不足在于，当围压为 0.5 MPa 时，本文模型计算得到峰值强度所对应的轴向应变要明显偏大；在高围压情况下 ($p_{oi} = 2.0$ MPa)，模型计算得到的峰值强度为 9.8 MPa，相比较试验结果存在大约 11% 的误差，有待进一步的改进。

随后，采用本文模型对不同温度下的 Ohay 软岩的三轴压缩排水试验结果^[2]进行计算。Ohay 软岩同样属于典型的堆积软岩，广泛分布于日本东北部。Ohay 软岩的矿物成分在高温作用下具有良好的化

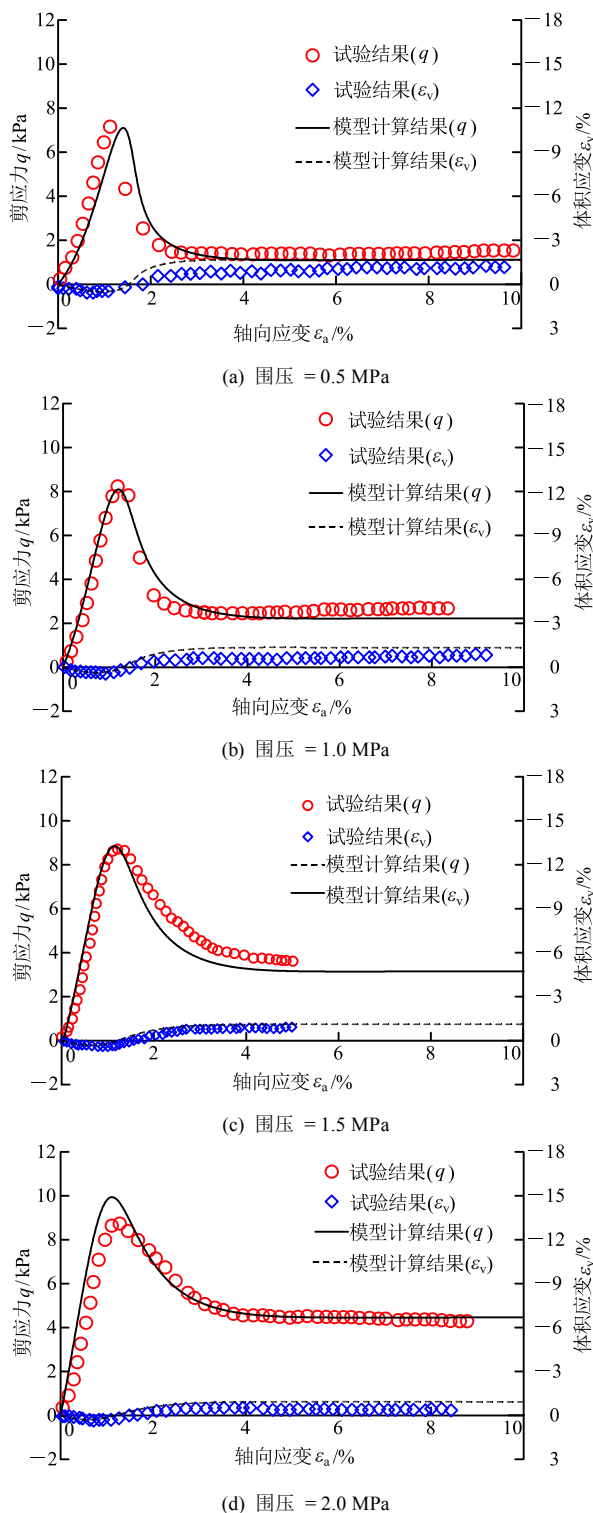


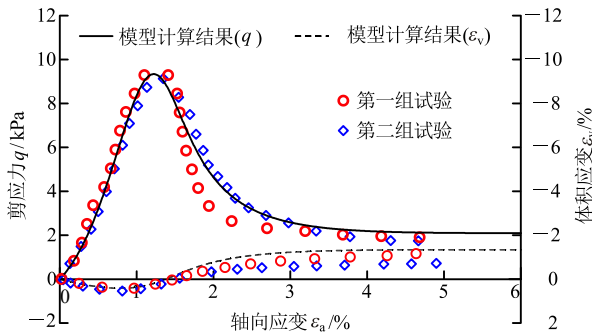
图 9 不同围压下太古石试验结果与模型计算结果对比
Fig.9 Comparisons of Taikoo stone test results and model calculation results under different confining pressures

学稳定性，可用于探究温度对软岩力学行为的影响。在试验过程中，Ohay 软岩的加载围压 $p_{oi} = 0.5$ MPa，假定其前期固结应力 p_{cT_0} 为 20 MPa，则初始超固结比 OCR = 40，加载温度 T 分别为 20 °C，40 °C，60 °C 和 80 °C，模型参数如表 3 所示。

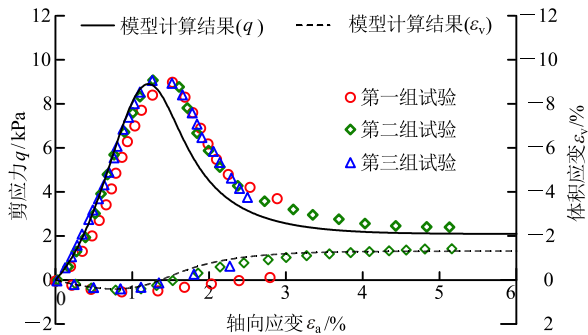
表 3 Ohay 软岩模型参数
Table 3 Ohay soft rock model parameters

e_0	ν	M	λ	κ	m	α_T
0.95	0.1	1.75	0.023	0.006 2	0.2	3.0×10^{-6}

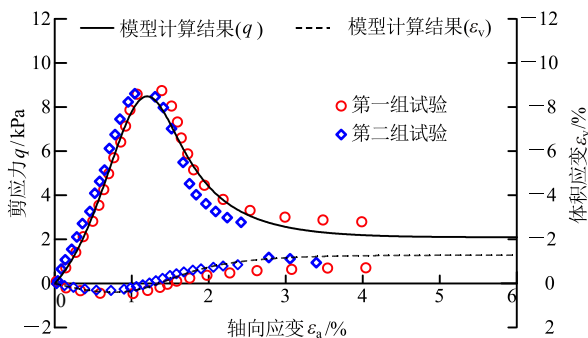
图 10 给出了不同温度下 Ohay 软岩的实验结果及模型计算结果，可以看出本文模型能够准确地描述温度对 Ohay 软岩力学特性的影响规律。随着温度升高，Ohay 软岩的峰值强度会出现不同程度的下降，并逐渐由脆性破坏转变为延性破坏；此外，Ohay 软岩的剪胀量会随着温度的升高而逐渐减小。本文模型主要不足在于，当温度为 40 °C 时，模型计算得到的峰值强度要小于试验结果，同时其所对应的轴向应变也明显偏小，误差为 15% 左右。



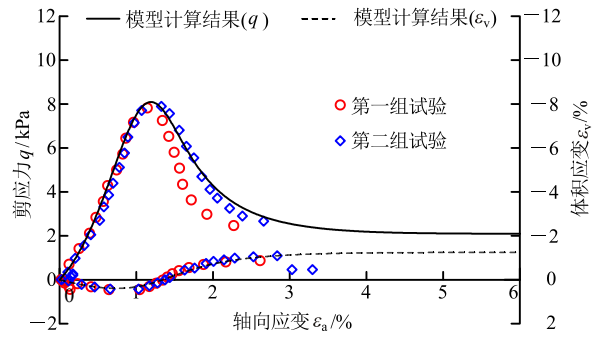
(a) 温度 $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$



(b) 温度 $T = 40\text{ }^\circ\text{C}$



(c) 温度 $T = 60\text{ }^\circ\text{C}$



(d) 温度 $T = 80\text{ }^\circ\text{C}$

图 10 不同温度下 Ohay 软岩实验结果与模型计算结果对比
Fig.10 Comparisons of Ohay soft rock experimental results and model calculation results at different temperatures

整体而言，本文基于分数阶热弹塑性理论所建立的下加载面模型能够较好的描述软岩的应变软化和剪胀特性，同时考虑温度对其力学行为的影响。

5 结 论

本文基于分数阶热弹塑性理论建立了考虑温度影响的软岩分数阶下加载面模型，该模型能够统一的描述相关联和非相关联的流动法则。通过将模型计算结果与试验结果进行对比分析，取得了良好的描述效果，主要结论有：

- (1) 软岩具有显著的应变软化和剪胀特性，超固结性和温度均会对其剪胀特性产生影响。
- (2) 模型计算结果表明软岩的热增强和热减弱效应与塑性流动法则正交性密切相关。在初始超固结比较小的情况，采用相关联的流动法则会导致软岩的不排水剪切强度随温度上升而减小；采用非关联的流动法则却会导致热增强效应。
- (3) 本文模型能够合理地描述温度对软岩力学特性的影响，所采用的模型参数均具有明确的物理意义，可以通过常规的室内试验结果加以确定。

附录：分数阶热弹塑性理论

考虑温度的影响，材料总的体积应变增量 $d\varepsilon$ 可以表示为

$$d\varepsilon = d\varepsilon_\sigma^e + d\varepsilon_T^e + d\varepsilon^p \tag{附 1}$$

式中： $d\varepsilon_\sigma^e$ ， $d\varepsilon_T^e$ 分别为应力加载和改变温度引起的弹性变形增量。

P. Y. Hong 等^[32]指出，温度作用下材料的应力

增量 $d\sigma$ 可以表示为

$$d\sigma = (C_e - C_p^e) : d\epsilon + (\alpha_T I : C_e - C_p^T) dT \quad (\text{附 } 2)$$

式中：符号“:”表示张量缩并； C_e 为弹性应力 - 应变张量，可表示为

$$C_e = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (\text{附 } 3)$$

式中： $\mathbf{1}$ ， \mathbf{I} 分别为二阶和四阶单位张量；符号“ \otimes ”表示张量乘积； K ， μ 分别为弹性体积模量和剪切模量，参考修正剑桥模型，假定 K 为关于当前孔隙比 e 和有效平均主应力 p 的函数，引入泊松比 ν ，则 K 和 μ 可以分别表示为

$$K = \frac{1+e}{\kappa} p, \quad \mu = \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} K \quad (\text{附 } 4)$$

C_p^e 和 C_p^T 分别为应变和温度引起的塑性应力 - 应变张量，可以表示为

$$C_p^e = \frac{C_e : \partial f / \partial \sigma \otimes \partial^\alpha f / \partial \sigma^\alpha : C_e}{K_p + \partial f / \partial \sigma : C_e : \partial^\alpha f / \partial \sigma^\alpha} \quad (\text{附 } 5)$$

$$C_p^T = \frac{C_e : \partial f^\alpha / \partial \sigma^\alpha [\alpha_T I : \partial f / \partial \sigma : C_e + \partial f / \partial T]}{K_p + \partial f / \partial \sigma : C_e : \partial^\alpha f / \partial \sigma^\alpha} \quad (\text{附 } 6)$$

式中： K_p 为塑性模量，其具体表达式可以由协调方程得到：

$$K_p = - \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_v^p} \frac{\partial^\alpha f}{\partial \sigma^\alpha} \quad (\text{附 } 7)$$

由此，可以得到分数阶热弹塑性理论，该理论能够在不引入塑性势函数的情况下统一描述相关联和非相关联的流动法则，为建立考虑温度影响的软岩弹塑性本构模型提供了良好的理论基础。

参考文献(References):

- [1] 张 锋. 计算土力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007: 31.(ZHANG Feng. Computational soil mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 2007: 31.(in Chinese))
- [2] ZHANG S, LENG W, ZHANG F, et al. A simple thermo-elastoplastic model for geomaterials[J]. International Journal of Plasticity, 2012, 34: 93 - 113.
- [3] NAKANO H, NISHIMURA T. Temperature-controlled triaxial compression/creep test device for thermodynamic properties of soft sedimentary rock and corresponding theoretical prediction[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2010, (3): 67 - 73.
- [4] 查文华, 宋新龙, 武腾飞. 不同温度条件下煤系砂质泥岩力学特征试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(4): 809 - 816.(ZHA Wenhua, SONG Xinlong, WU Tengfei. Experimental study of mechanical characteristics of coal-serial sandy mudstone at different temperatures[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(4): 809 - 816.(in Chinese))
- [5] 何满潮. 深部软岩工程的研究进展与挑战[J]. 煤炭学报, 2014, 39(8): 1 409 - 1 417.(HE Manchao. Progress and challenges of soft rock engineering in depth[J]. Journal of China Coal Society, 2014, 39(8): 1 409 - 1 417.(in Chinese))
- [6] NOBLE C A. Effect of temperature on strength of soils[Ph. D. Thesis][D]. Iowa, USA: Iowa State University, 1968.
- [7] CEKEREVAC C, LALOUI L. Experimental study of thermal effects on the mechanical behaviour of a clay[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004, 28(3): 209 - 228.
- [8] KUNTIWATTANAKUL P. Effect of high temperature on mechanical behaviour of clays[Ph. D. Thesis][D]. Tokyo: University of Tokyo, 1991.
- [9] 张 升, 贺佐跃, 滕继东, 等. 考虑结构性的软岩热弹塑性本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(3): 571 - 578.(ZHANG Sheng, HE Zuoyue, TENG Jidong, et al. A thermo-elasto-plastic model for soft rocks considering structure[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(3): 571 - 578.(in Chinese))
- [10] ABUEL-NAGA H M. Thermo-mechanical behavior of soft bangkok clay: experimental results and constitutive modeling[Ph. D. Thesis][D]. Bangkok: Asian Institute of Technology, 2006.
- [11] GHAREMANNEJAD B. Thermo-mechanical behaviour of two reconstituted clays[Ph. D. Thesis][D]. Sydney: The University of Sydney, 2003.
- [12] 李海潮, 张 升, 沈 远. 考虑温度影响的岩土材料高阶屈服函数[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(12): 2 795 - 2 803.(LI Haichao, ZHANG Sheng, SHEN Yuan. A high order yield function for geo-materials considering the effect of temperature[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(12): 2 795 - 2 803.(in Chinese))
- [13] 杨骐莱, 熊勇林, 张 升, 等. 考虑温度影响的软岩弹塑性本构模型[J]. 岩土力学, 2019, 40(5): 1 898 - 1 906.(YANG Qilai, XIONG Yonglin, ZHANG Sheng, et al. Elastoplastic constitutive model for soft rock considering temperature effect[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(5): 1 898 - 1 906.(in Chinese))
- [14] SUN Y, GAO Y, ZHU Q. Fractional order plasticity modelling of state-dependent behaviour of granular soils without using plastic

- potential[J]. *International Journal of Plasticity*, 2018, 102(3): 53 - 69.
- [15] SUN Y, XIAO Y. Fractional order plasticity model for granular soils subjected to monotonic triaxial compression[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 118 - 119: 224 - 234.
- [16] CAPUTO M, M FABRIZIO. A new definition of fractional derivative without singular kernel[J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2015, 1(2): 73 - 85.
- [17] 孙逸飞, 沈 扬. 基于分数阶微积分的粗粒料静动力边界本构模型[J]. *岩土力学*, 2018, 39(4): 1 219 - 1 226.(SUN Yifei, SHEN Yang. Bounding surface model for granular aggregates incorporating the concept of fractional calculus[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, 39(4): 1 219 - 1 226.(in Chinese))
- [18] 孙逸飞, 高玉峰, 鞠 雯. 分数阶塑性力学及其砂土本构模型[J]. *岩土工程学报*, 2018, 40(8): 1 535 - 1 541.(SUN Yifei, GAO Yufeng, JU Wen. Fractional plasticity and its application in constitutive model for sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, 40(8): 1 535 - 1 541.(in Chinese))
- [19] LU D, LIANG J, DU X, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 105(2): 277 - 290.
- [20] SUMELK A, WOJCIEC H. Application of fractional continuum mechanics to rate independent plasticity[J]. *Acta Mechanica*, 2014, 225(11): 3 247 - 3 264.
- [21] SULTAN N, DELAGE P, CUI Y J. Temperature effects on the volume change behaviour of Boom clay[J]. *Engineering Geology*, 2002, 64(2): 135 - 145.
- [22] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized stress-strain behaviour of wet clay[J]. *Engineering Plasticity*, 1968, 535 - 609.
- [23] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, 25(8): 917 - 945.
- [24] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S, OKAYASU T. Evaluation of typical conventional and unconventional plasticity models for prediction of softening behaviour of soils[J]. *Géotechnique*, 2002, 52(8): 561 - 578.
- [25] ANANDARAJAH A, DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity. III : application to anisotropic cohesive soils[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(12): 1 292 - 1 318.
- [26] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: Three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. *Géotechnique*, 2009, 59(5): 451 - 469.
- [27] YAO Y P, ZHOU A N. Non-isothermal unified hardening model: a thermo-elasto-plastic model for clays[J]. *Géotechnique*, 2013, 63(15): 1 328 - 1 345.
- [28] UCHAIPICHAT A, KHALILI N. Experimental investigation of thermo-hydromechanical behaviour of an unsaturated silt[J]. *Géotechnique*, 2009, 59(4): 339 - 53.
- [29] 刘斯宏, 沈超敏, 毛航宇, 等. 堆石料状态相关弹塑性本构模型[J]. *岩土力学*, 2019, 40(8): 2 891 - 2 898.(LIU Sihong, SHEN Chaomin, MAO Hangyu, et al. State-dependent elastoplastic constitutive model for rockfill materials[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, 40(8): 2 891 - 2 898.(in Chinese))
- [30] XIONG Y L, YE G L, ZHU H H, et al. A unified thermo-elasto-viscoplastic model for soft rock[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2017, 93: 1 - 12.
- [31] 张 升, 李海潮, 滕继东, 等. 考虑围压依存性的软岩结构性下加载面模型[J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(7): 1 269 - 1 276.(ZHANG Sheng, LI Haichao, TENG Jidong, et al. Structured subloading yield surface model for soft rock considering confining pressure[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(7): 1 269 - 1 276.(in Chinese))
- [32] HONG P Y, PEREIRA J M, CUI Y J, et al. A two-surface thermomechanical model for saturated clays[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2016, 40(7): 1 059 - 1 080.